$\boxed{01/06/17}$

Έστω $I \leq (R,+)$. Επειδή η $(R,+)$ είναι αβελιανή $\Rightarrow I \trianglelefteq (R,+) \Rightarrow$ $\Rightarrow$ ορίζεται η $(R/I,+)$, η οποία είναι αβελιανή, όπου: $(x+I)+(y+I)=(x+y)+I$. Τότε:

I: ιδεώδες του $R \Leftrightarrow$ ορίζοντας $(x+I)(y+I)=x\cdot y+I$ αποκτούμε μια καλά ορισμένη πράξη επί του R/I. $(*)$.

[Η υποομάδα $I \leq (R,+)$ είναι ιδεώδες $\Leftrightarrow \forall \alpha \in I, \forall r \in R: \alpha\cdot r, r\cdot\alpha \in I$]

$(\Rightarrow)$: Έστω ότι I: ιδεώδες του R. Θδο: αν $\left.\begin{array}{l} x+I=x'+I \\ y+I=y'+I \end{array}\right\} \Rightarrow$ $\Rightarrow x\cdot y+I=x'\cdot y'+I$. Θα έχουμε: $\left.\begin{cases} x-x'\in I \\ y-y'\in I \end{cases}\right\} \xrightarrow[I:\text{ιδεώδες}]{} \begin{cases} xy-x'y\in I \\ x'y-x'y'\in I \end{cases}$ $\Rightarrow xy-x'y'\in I \Rightarrow x\cdot y+I=x'y'+I$

Άρα η παραπάνω πράξη είναι καλά ορισμένη.

$(\Leftarrow)$: Έστω $\alpha\in I$ και τυχόν $r\in R$. Τότε: $\left.\begin{array}{l} \alpha\in I \Leftrightarrow \alpha+I=0+I \\ r\in R \Rightarrow r+I=r+I \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha\cdot r+I=0\cdot r+I \\ r\cdot\alpha+I=r\cdot 0+I \end{array}\right\| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha r+I=I \\ r\alpha+I=I \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha r, r\cdot\alpha \in I \Rightarrow I$: ιδεώδες.

<u>Πρόταση</u>: Έστω I: ιδεώδες του R. Τότε η τριάδα $(R/I,+,\cdot)$ είναι δακτύλιος με μονάδα: $1_{R/I}=1_R+I$. Επιπλέον αν R: μεταθετικός δακτύλιος τότε και ο δακτύλιος R/I είναι μεταθετικός.

<u>Απόδ</u>: Γνωρίζουμε ότι $(R/I,+)$: αβελιανή.

- $[(x+I)\cdot(y+I)]\cdot(z+I)=(x\cdot y+I)(z+I)=(x\cdot y)z+I=$ $=x(y\cdot z)+I=(x+I)(y\cdot z+I)=(x+I)[(y+I)(z+I)] \Rightarrow$ $\Rightarrow$ ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα του πολ/μού, και παρόμοια έπεται ότι: $(x+I)[(y+I)+(z+I)]=(x+I)(y+I)+(x+I)(z+I)$ και ανάλογα $[(x+I)+(y+I)](z+I)=(x+I)(z+I)+(y+I)(z+I)$

Είναι: $(x+I)(1_R+I)=x\cdot 1_R+I=x+I=1_R\cdot x+I=(1_R+I)(x+I)$

Άρα $1_{R/I}=1_R+I$.

Αν R: μεταθετικός, τότε $(x+I)(y+I)=x\cdot y+I \overset{(1)}{=} y\cdot x+I=(y+I)(x+I) \Rightarrow R/I$: μεταθετικός.

Ορισμός: Αν I ιδεώδες του R, ο δακτύλιος R/I καλείται δακτύλιος πηλίκο του R ως προς το ιδεώδες I.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: ① Αν $f: R \to R'$ είναι ένας ομομορφισμός δακτυλίων, τότε $Ker(f)$ είναι ιδεώδες του R.

② Αντίστροφα, αν I: ιδεώδες του R τότε η απεικόνιση $\pi: R \to R/I$, όπου $\pi(x) = x+I$, $x \in R$ είναι επιμορφισμός δακτυλίων με $Ker(\pi) = I$.

Πράγματι: $\pi(x+y) = (x+y)+I = (x+I)+(y+I) = \pi(x)+\pi(y)$

$\pi(x \cdot y) = (xy)+I = (x+I)\cdot(y+I) = \pi(x)\cdot\pi(y)$

$\pi(1_R) = 1_R + I = 1_{R/I}$

$\Rightarrow \pi$: ομομορφισμός δακτυλίων + επί $\Rightarrow \pi$: επιμορφισμός δακτυλ.

$Ker(\pi) = \{x \in R \mid \pi(x) = 0_{R/I}\} = \{x \in R \mid \pi(x) = x+I = 0+I\} = \{x \in R \mid x \in I\} = I$

Π.χ.: Έστω R: δακτύλιος. Τότε: $\{0\}$: ιδεώδες, το μηδενικό ιδεώδες του R. R: ιδεώδες του R. Κάθε ιδεώδες I του R με $I \neq R$ θα καλείται γνήσιο ιδεώδες.

Ο δακτύλιος R θα καλείται <u>απλός</u> $\Leftrightarrow$ τα μόνα ιδεώδη του είναι τα $\{0\}, R$

(*) Ο δακτύλιος $\mathbb{Z}_p$ είναι απλός, διότι: αν I: ιδεώδες του $\mathbb{Z}_p$, τότε: $I \leq (\mathbb{Z}_p, +)$ και άρα από Θ. Lagrange, $|I| = 1, p$ και προφανώς

- αν $|I| = 1 \Rightarrow I = \{0\}$
- αν $|I| = p \Rightarrow I = \mathbb{Z}_p$

$\Rightarrow \mathbb{Z}_p$: απλός.

Πρόταση: ① Αν I: ιδεώδες του R, τότε: $I = R \Leftrightarrow I \cap U(R) \neq \emptyset$.

② Αν I: ιδεώδες του R, τότε $R = I \Leftrightarrow 1_R \in I$

③ Κάθε δακτύλιος διαίρεσης, ιδιαίτερα κάθε σώμα, είναι απλός δακτύλιος

Απόδ.: ① (⇒) Αν $I=R$, τότε $1_R\in I\cap U(R)\Rightarrow I\cap U(R)\neq\emptyset$

(⇐) Έστω $I\cap U(R)\neq\emptyset\Rightarrow\exists\alpha\in I\cap U(R):\begin{cases}\alpha\in I\\ \alpha\in U(R)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha\in I\\ \exists\alpha^{-1}\in R:\alpha\cdot\alpha^{-1}=1_R=\alpha^{-1}\cdot\alpha\end{cases}$

Τότε $\left.\begin{array}{l}\alpha\cdot\alpha^{-1}=1_R\\ \alpha\in I\end{array}\right\}\Rightarrow 1_R\in I$. Τότε $\forall r\in R$: $\left.\begin{array}{l}r\cdot 1_R=r\\ 1_R\in I\end{array}\right\}\Rightarrow r\in I$

Άρα $R=I$.

② Προκύπτει από το ①

③ Έστω R: δακτύλιος διαίρεσης δηλ. $U(R)=R^*=R\setminus\{0\}$

Έστω I: ιδεώδες του R και έστω $I\neq\{0\}\Rightarrow\exists\alpha\in I:\alpha\neq0$

Επειδή R: δακτ. διαίρεσης $\Rightarrow\exists\alpha^{-1}\in R:\alpha\cdot\alpha^{-1}=1_R=\alpha^{-1}\cdot\alpha\Rightarrow\alpha\in I\cap U(R)\Rightarrow$

$\Rightarrow I\cap U(R)\neq\emptyset\overset{①}{\Rightarrow}I=R\Rightarrow$ άρα είτε $I=\{0\}$ είτε $I=R\Rightarrow R$: απλός

Ο δακτύλιος $M_n(R)$ όπου R: δακτ. διαίρεσης ή σώμα, είναι απλός, και ο $M_n(R)$ δεν είναι δακτύλιος διαίρεσης ή σώμα, $n>1$

Έστω R: δακτύλιος και $\alpha\in R$. Θεωρούμε το σύνολο $(\alpha)=R\alpha R=\left\{\sum_{k=1}^{n}r_k\cdot\alpha\cdot s_k\ \middle|\ \begin{array}{l}r_k,s_k\in R\\ 1\le k\le n\in\mathbb{N}\end{array}\right\}$

Το σύνολο (α) είναι ένα ιδεώδες του R, που περιέχει το α, και είναι το μικρότερο ιδεώδες του R το οποίο περιέχει το α.

- $0\in(\alpha)$ διότι: $0=r_1\cdot\alpha\cdot s_1$, $s_1=0=r_1$
- αν $\left.\begin{array}{l}x=\sum_{k=1}^{n}r_k\cdot\alpha\cdot s_k\in(\alpha)\\ y=\sum_{k=1}^{m}r_k'\cdot\alpha\cdot s_k'\in(\alpha)\end{array}\right\}\Rightarrow x-y=r_1\cdot\alpha\cdot s_1+\dots+r_n\cdot\alpha\cdot s_n-r_1'\cdot\alpha\cdot s_1'-\dots-r_m'\cdot\alpha\cdot s_m'=$

$=r_1\cdot\alpha\cdot s_1+\dots+r_n\cdot\alpha\cdot s_n+(-r_1')\cdot\alpha\cdot(-s_1')+\dots+(-r_m')\cdot\alpha(-s_m')\Rightarrow x-y\in(\alpha)$.

- $x=\sum_{k=1}^{n}r_k\cdot\alpha\cdot s_k\in(\alpha)$ Τότε $r\cdot x=r\sum_{k=1}^{n}r_k\cdot\alpha\cdot s_k=\sum_{k=1}^{n}(r\cdot r_k)\cdot\alpha\cdot s_k\Rightarrow$

$\Rightarrow r\cdot x\in(\alpha)$.

Παρόμοια $x\cdot r=\left(\sum_{k=1}^{n}r_k\cdot\alpha\cdot s_k\right)\cdot r=\sum_{k=1}^{n}r_k\cdot\alpha\cdot(s_k\cdot r)\in(\alpha)$.

Άρα ①,②,③ $\Rightarrow(\alpha)$: ιδεώδες του R.

• $\alpha \in (\alpha)$ διότι $\alpha = 1_R \cdot \alpha \cdot 1_R \in (\alpha)$.

• Αν I: ιδεώδες του R με $\alpha \in I$, τότε $(\alpha) \subseteq I$

$\left.\begin{array}{l} \alpha \in I \\ I: \text{ιδεώδες} \end{array}\right\} \Rightarrow \forall r, s \in R: r\cdot\alpha\, s \in I \Rightarrow$ αν $n \geq 1$ κ' $r_k, s_k \in R$, $1 \leq k \leq n$: $\underset{1\leq k\leq n}{r_k \cdot \alpha \cdot s_k \in I}$ κ' $\sum_{k=1}^{n} r_k \cdot \alpha \cdot s_k \in I \Rightarrow (\alpha) \subseteq I$.

<u>Ορισμός</u>: Αν $\alpha \in R$, το ιδεώδες (α) καλείται το <u>κύριο ιδεώδες</u> του R το οποίο παράγεται απ' το α.

<u>Παρατήρηση</u>: Αν R: μεταθετικός, τότε: $(\alpha) = R\alpha = \alpha R = \{r\cdot\alpha \in R \mid r \in R\} =$
$= \{\alpha \cdot r \in R \mid r \in R\}$

Αν $r \in R$, τότε $r\cdot\alpha = r\cdot\alpha\cdot 1_R \in (\alpha)$ Άρα $\{r\cdot\alpha \in R \mid r \in R\} \subseteq (\alpha)$ (1)

Αντίστροφα αν $\sum_{k=1}^{n} r_k \cdot \alpha \cdot s_k \in (\alpha)$ τότε: $\sum_{k=1}^{n} r_k \cdot \alpha \cdot s_k = \sum_{k=1}^{n} r_k \cdot s_k \cdot \alpha =$
$= \left(\sum_{k=1}^{n} r_k s_k\right)\alpha \in \{r\cdot\alpha \in R \mid r \in R\}$. Άρα $(\alpha) \subseteq \{r\alpha \in R \mid r \in R\}$ (2)

Από (1), (2) $\Rightarrow (\alpha) = \{r\alpha \in R \mid r \in R\}$.

<u>Π.χ.</u>: Αν R: μεταθ. δακτ., τότε $\forall P(t) \in R[t]$ το κύριο ιδεώδες
$P(t) = \{A(t)P(t) \in R[t] \mid A(t) \in R[t]\}$

Οδό αν R: σώμα, τότε κάθε ιδεώδες του $R[t]$ είναι της μορφής $P(t)$, για κάποιο $P(t) \in R[t]$.

Αν $R = \mathbb{Z}$ τότε τα ιδεώδη του είναι τα: $n\mathbb{Z}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$
$(n) = n\mathbb{Z} = \{nk \in \mathbb{Z} \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Άρα κάθε ιδεώδες του $\mathbb{Z}$ είναι κύριο.

<u>1ο Θεώρημα Ισομορφισμών δακτυλίων.</u>

Αν $f: R \to R'$ ομομορφισμός δακτυλίων, τότε: $Ker(f)$: ιδεώδες του R, $Im(f)$: υποδακτύλιος του R' και η απεικόνιση $\bar{f}: R/_{Ker(f)} \to Im(f)$ είναι ισομορφισμός δακτυλίων με $r + Ker(f) \longmapsto f(r)$.

Αποδ: Αρκεί νδο: $\bar{f}(1_{R/Ker(f)}) = 1_{Im(f)}$ κ' $\bar{f}$ διατηρεί τον πολ/σμό.

$$\bar{f}(1_{R/Ker(f)}) = \bar{f}(1_R + Ker(f)) = f(1_R) = 1_{R'} = 1_{Im(f)}$$

$$\bar{f}[(x+Ker(f))(y+Ker(f))] = \bar{f}(x\cdot y + Ker(f)) = f(x\cdot y) = f(x)\cdot f(y) =$$

$$= \bar{f}[x+Ker(f)]\cdot\bar{f}[y+Ker(f)] \Rightarrow \bar{f}: \text{ισομορφισμός δακτυλίων.}$$